

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapă locală****Județul Alba, 13 februarie 2015****Clasa a VIII-a**

1. Determinați numerele reale  $x$  și  $y$  care verifică egalitatea:

$$\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 7} + \sqrt{y^2 - 6y + 18} = 5.$$

2. Se dă expresia  $E_{(x,k)} = x^2 + (4k + 1)x - 4k - 2$ , unde  $x \in \mathbb{N}^*$  iar  $k \in \mathbb{N}$ .

a) Arătați că  $E_{(x,k)} = (x - 1) \cdot (x + 4k + 2)$ ,  $\forall x \in \mathbb{N}^*$  și  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

b) Determinați  $x$  din  $\mathbb{N}^*$  astfel încât  $E_{(x,k)} = 0$ .

c) Demonstrați că  $\frac{x+k}{3k+2} \geq \frac{k+1}{x+3k+1}$ ,  $\forall x \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}$ .

d) Rezolvați ecuația:  $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{8} + \dots + \frac{x+33}{101} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+4} + \frac{3}{x+7} + \dots + \frac{34}{x+100}$ .

3. Se dă cubul  $ABCD A' B' C' D'$ , de latură  $a$  și fie  $M$  simetricul punctului  $A$  față de punctul  $B$ . Se notează cu  $O$  punctul de intersecție al diagonalelor bazei  $ABCD$ .

a) Determinați, în funcție de  $a$ , distanța de la punctul  $C'$  la dreapta  $OM$ .

b) Determinați sinusul unghiului dintre dreptele  $BD'$  și  $C'O$ .

4. Se dă tetraedrul  $ABCD$ , cu muchiile  $AB = a, CD = b; a, b \in \mathbb{N}^*, a > b$ . Secționăm tetraedrul  $ABCD$  cu un plan  $(MNPQ)$  paralel cu muchiile  $AB$  și  $CD$  astfel încât  $M \in (BC), N \in (BD), P \in (AD), Q \in (AC)$  și  $\frac{MB}{MC} = x$ .

a) Arătați că patrulaterul  $MNPQ$  este paralelogram.

b) Arătați că  $MN = \frac{bx}{x+1}$ .

c) Determinați, în funcție de  $a$  și  $b$  valoarea raportului  $x = \frac{MB}{MC}$  astfel încât paralelogramul  $MNPQ$  să aibă perimetrul maxim, exprimat printr-un număr întreg.

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*